V. DISCUSIÓN DE ECUACIONES ALGEBRAICAS

5.1. DISCUSIÓN DE UNA ECUACIÓN

Discutir una ecuación algebraica representada por una expresión en dos variables de la forma $f(x,y)=0$, significa analizar algunos pasos que nos permitan conocer aspectos importantes de la ecuación y con esto poder trazar su gráfica con alguna precisión de una manera relativamente sencilla. Los pasos por analizar los pondremos en forma de listado como sigue:

1. Extensión.
2. Intersecciones: Con el eje "x" y con el eje "y".
3. Simetrías: Con el eje "x", con el eje "y", con el origen de coordenadas.
4. Asíntotas: Horizontales y verticales.
5. Tabulación.
6. Gráfica.

Expliquemos cada uno de estos pasos en el orden:

1. Extensión: La extensión de una curva $f(x,y)=0$, trata la determinación de los intervalos de variación para los cuales los valores de "x" y "y" son valores reales, esto nos ayuda para la localización de la curva en el plano coordenado y además poder saber si se trata de una curva cerrada o de extensión indefinida. Los intervalos de variación se determinan de la misma forma que en la sección 1.4 del capítulo I, despejando "y" en términos de "x" y luego despejando "x" en términos de "y", determinando así el Dominio y el Rango de la ecuación $f(x,y)=0$.

2. Intersecciones: Con el eje "x" y con el eje "y".

   Recordando que todo punto que se localice sobre el eje "x" tiene coordenadas $(x,0)$ donde $x\in\mathbb{R}$ y todo punto sobre el eje "y" tiene coordenadas $(0,y)$ donde $y\in\mathbb{R}$, recordar esto nos permite obtener las intersecciones de la gráfica de la ecuación con los ejes coordenados procediendo como sigue:

   a) Con el eje "x". En la ecuación dada, sustitúyase CERO en la variable "y" y resuélvase para x.

   b) Con el eje "y". En la ecuación dada, sustitúyase CERO en la variable "x" y resuélvase para y.

   - Es conveniente aclarar que algunas ecuaciones pueden tener uno, varios o ningún punto de intersección con los ejes.

3. <u>Simetrías</u>: a) Con el eje "x", b) Con el eje "y", c) Con el origen de coordenadas.

- Una curva es simétrica respecto a una línea recta si cada punto de la curva tiene su <u>simétrico</u> con respecto a la recta.

a) Con el eje "x": Si en la ecuación dada (la original) se sustituye la "y" por "$-y$" y esta no cambia respecto a la original, entonces la curva dada es simétrica respecto al eje "x", si cambia, entonces no hay simetría con el eje "x" (ya que los puntos de coordenadas (x,y) y $(x,-y)$ con $x,y \in \mathbb{R}$ son simétricos respecto al eje "x").

b) Con el eje "y": Si en la ecuación dada (la original) se sustituye la "x" por "$-x$" y esta no cambia respecto a la original, entonces la curva dada es simétrica respecto al eje "y", si cambia, entonces no hay simetría con el eje "y" (ya que los puntos de coordenadas (x,y) y $(-x,y)$ con $x,y \in \mathbb{R}$ son simétricos respecto al eje "y").

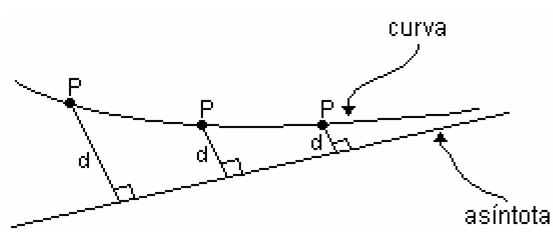
- Una curva es simétrica con respecto a un punto P si cada punto de la curva tiene su simétrico con respecto al punto P.

c) Con el origen de coordenadas: Si en la ecuación dada (la original) se sustituye la "x" por "$-x$" y la "y" por "$-y$" y esta no cambia respecto a la original, entonces la curva dada es simétrica respecto al origen de coordenadas, si cambia, entonces no hay simetría respecto al origen (ya que los puntos de coordenadas (x,y) y $(-x,-y)$ con $x,y \in \mathbb{R}$ son simétricos con respecto al origen de coordenadas).

- Cuando hay simetría respecto a los dos ejes, también habrá simetría respecto al origen. Cuando hay simetría con respecto a uno solo de los ejes, no habrá simetría respecto al origen. Si no hay simetría con respecto a ninguno de los ejes, es posible que si haya simetría respecto al origen y hay que investigarlo.

4. <u>Asíntotas</u>: a) Horizontales, b) Verticales.

- Si la distancia "d" entre un punto P que se mueve a lo largo de una curva respecto a una línea recta, se hace cada vez más pequeña sin que llegue a tocar la recta, dicha recta es asíntota de la curva.



- Trataremos algunas reglas para determinar asíntotas cuando se tienen ecuaciones algebraicas de la forma $y = \frac{f(x)}{g(x)}$; $y = \sqrt{\frac{f(x)}{g(x)}}$ donde $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios en "x" distintos de cero, tienen asíntotas <u>horizontales</u> y <u>verticales</u>.

1ª Regla: Si los polinomios $f(x)$ y $g(x)$ son de <u>igual grado</u>, al efectuar la división $f(x) \div g(x)$, el cociente "k" es la asíntota horizontal $(y = k)$, e igualando a cero el polinomio del denominador $g(x) = 0$ y resolviendo para x, se obtendrán las asíntotas verticales:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = k + \frac{r(x)}{g(x)}$$

2ª Regla: Si el polinomio del numerador $f(x)$ es de <u>menor grado</u> que el del polinomio del denominador $g(x)$, la asíntota horizontal es el eje "x" cuya ecuación es $y = 0$, e igualando a cero el polinomio del denominador $g(x) = 0$ y resolviendo para x, se obtendrán las asíntotas verticales.

3ª Regla: Si el polinomio del numerador $f(x)$ es de <u>grado mayor</u> que el del polinomio del denominador $g(x)$, entonces no existe asíntota horizontal o serán de otra forma, en este momento serían necesarios conceptos que se verán más adelante. En lo que respecta a las asíntotas verticales si las hay, su tratamiento es similar a las reglas anteriores.

5. Tabulación: Este concepto ya se trató en el capítulo I y también se aconseja reestudiarlo.

6. Gráfica: Con toda la información obtenida en los 5 puntos anteriores, se procede a graficar la ecuación original como veremos en los siguientes:

EJEMPLOS

Discutir la ecuación dada en cada inciso.

1) $x^2y - 3xy - x^2 + 2y - 3x - 2 = 0$

<u>Solución</u>

Debemos analizar paso por paso como sigue:

1. <u>Extensión.</u>

Despejando "y" en términos de "x" se tiene:

$y(x^2 - 3x + 2) = x^2 + 3x + 2$; $y = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 3x + 2}$

Igualando a cero el denominador: $x^2 - 3x + 2 = 0$

factorizando $(x-2)(x-1) = 0$

igualando a cero cada factor $x - 2 = 0$; $x = 2$

$x - 1 = 0$; $x = 1$

Dominio $= \mathbb{R} - \{1, 2\} = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)$

2. <u>Intersecciones.</u>

a) Con el eje "y": Si $x = 0$; $y = \dfrac{0+0+2}{0-0+2} = 1$; $y = 1$; $P_1(0,1)$

b) Con el eje "x": Si $y = 0$; $0 = \dfrac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}$

$(0)(x^2 - 3x + 2) = x^2 + 3x + 2$; $x^2 + 3x + 2 = 0$

factorizando $(x+1)(x+2) = 0$

$x + 1 = 0$; $x = -1$; $P_2(-1,0)$

$x + 2 = 0$; $x = -2$; $P_3(-2,0)$

3. <u>Simetrías.</u>

a) Con el eje "x": Sustituyendo en la ecuación original la $y \xrightarrow{por} -y$ se tiene:

$$-y = \frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}$$

$$(-1)(-y) = (-1)\left(\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}\right)$$

$y = -\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}$ cambió respecto a la ecuación original, luego no hay simetría con el eje "x".

b) Con el eje "y": $x \xrightarrow{por} -x$; $y = \dfrac{(-x)^2+3(-x)+2}{(-x)^2-3(-x)+2}$

$y = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$ cambió respecto a la ecuación original, luego no hay simetría con el eje "y".

c) Con el origen de coordenadas: $x \to -x$, $y \to -y$

$$-y = \frac{(-x)^2+3(-x)+2}{(-x)^2-3(-x)+2} = \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$$

$y = -\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$ cambió, no hay simetría con el origen.

4. <u>Asíntotas.</u>

a) Horizontales: Por la 1ª Regla, efectuamos la división

$$\begin{array}{r|l} & \quad 1 \\ \cline{2-2} x^2-3x+2 & x^2+3x+2 \\ & \underline{-x^2+3x-2} \\ & \quad 6x \end{array} \qquad ; \qquad y=\overset{\text{cociente}}{1}+\frac{\overset{\text{residuo}}{6x}}{x^2-3x+2}$$

$y=1$ es la ecuación de la asíntota horizontal.

b) Verticales: Igualando a cero el denominador $x^2-3x+2=0$; factorizando $(x-1)(x-2)=0$; $x-1=0$; $x=1 \Rightarrow x-2=0$; $x=2$

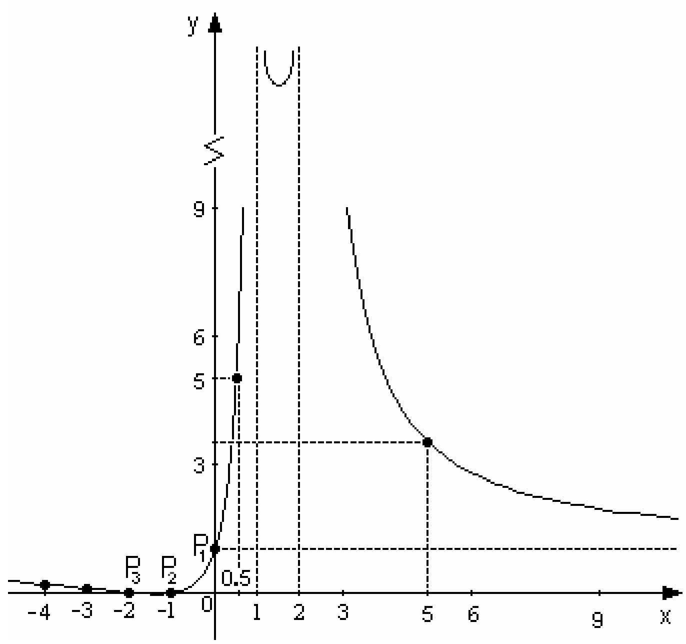
las ecuaciones $x=1$ y $x=2$ son las asíntotas verticales.

5. <u>Tabulación.</u>

De acuerdo con el dominio, se dan los siguientes valores para x:

x	-4	-3	-2	-1.5	-1	0.5	1.1	1.5	2.1	5
y	0.2	0.1	0	-0.03	0	5	$72.\overline{3}$	35	$115.\overline{54}$	3.5

6. <u>Gráfica.</u>



2) $x^2y-x-y=0$

<u>Solución</u>

1. <u>Extensión.</u>

Despejando "y" en términos de "x" se obtiene:

$$y\left(x^2-1\right)=x \quad ; \quad y=\frac{x}{x^2-1}$$

a) Dominio: $x^2 - 1 = 0$; $(x-1)(x+1) = 0$; $x = 1$, $x = -1$

Dominio $= \mathbb{R} - \{-1,1\} = (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,\infty)$

2. Intersecciones.

a) Eje "x": Si $y = 0$; $0 = \dfrac{x}{x^2 - 1}$; $x = 0$; $P_1(0,0)$

b) Eje "y": Si $x = 0$; $y = \dfrac{0}{(0)^2 - 1}$; $P_1(0,0)$

3. Simetrías.

a) Eje "x": $y \to -y$; $-y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$; $y = -\dfrac{x}{x^2 - 1}$ cambió, no hay simetría con el eje "x".

b) Eje "y": $x \to -x$; $y = \dfrac{-x}{(-x)^2 - 1}$; $y = \dfrac{-x}{x^2 - 1}$ cambió, no hay simetría con el eje "y".

c) Origen: $x \to -x$, $y \to -y$; $-y = \dfrac{-x}{x^2 - 1}$; $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ no cambió, si hay simetría con el origen.

4. Asíntotas.

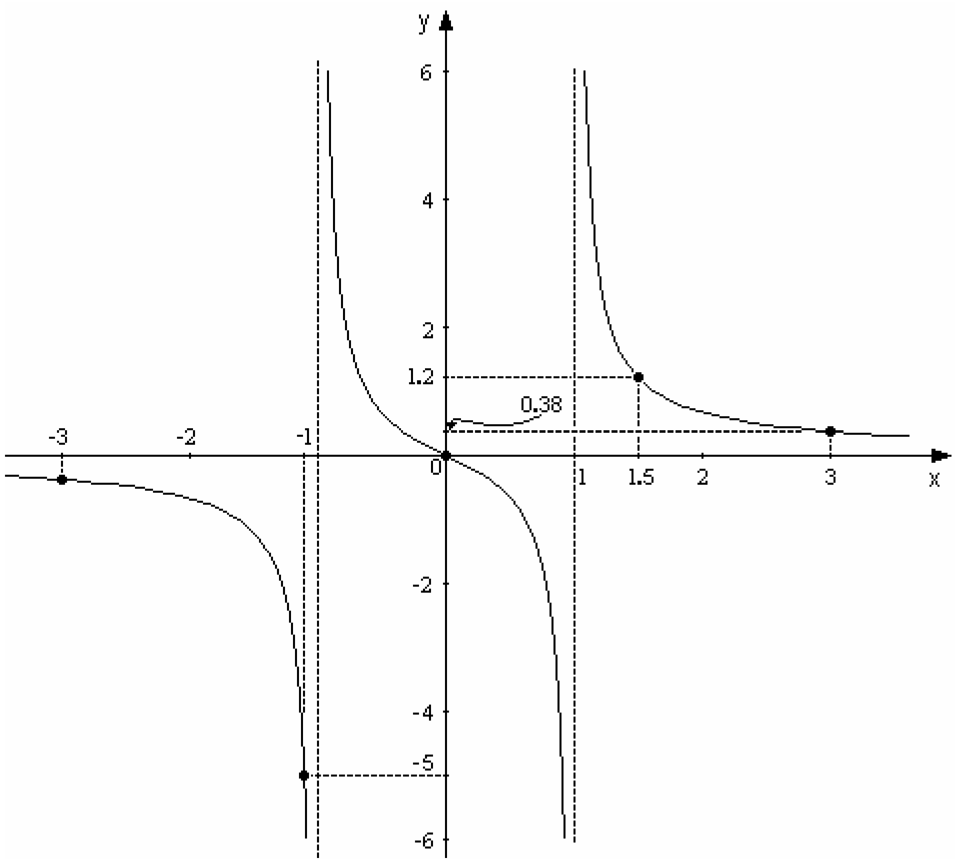
a) Horizontales: Por la 2ª Regla, la asíntota horizontal es el eje "x" cuya ecuación es $y = 0$.

b) Verticales: Igualando a cero el denominador $x^2 - 1 = 0$; $(x-1)(x+1) = 0$; $x = -1$ y $x = 1$.

5. Tabulación.

x	-3	-1.1	-0.9	0	0.9	1.5	3
y	-0.38	-5.24	4.74	0	-4.74	1.2	0.38

6. Gráfica.

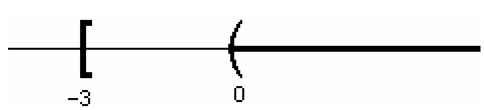


3) $y = \sqrt{\dfrac{x+3}{x}}$

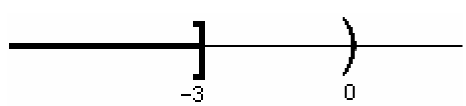
Solución

1. Extensión.

a) Dominio: Los valores permisibles para "x" son aquellos para los cuales el subradical (lo que esta dentro de la raíz cuadrada) sea positivo o cero. El subradical es positivo cuando la "x" tome valores menores que -3 inclusive y mayores que cero, esto es: $\dfrac{x+3}{x} \geq 0$; si $x > 0$ entonces $x+3 \geq 0$; donde $x \geq -3$, graficando este resultado:



Si $x < 0$ entonces $x+3 \leq 0$; donde $x \leq -3$, graficando este resultado:



$Dominio = (-\infty, -3] \cup (0, \infty)$

2. Intersecciones.

a) **Eje "x"**: Si $y=0$; $0=\sqrt{\dfrac{x+3}{x}}$; $0=\dfrac{x+3}{x}$; $x+3=0$; $x=-3$; $P_1(-3,0)$.

b) **Eje "y"**: Si $x=0$; $y=\sqrt{\dfrac{0+3}{0}}\notin\mathbb{R}$; no hay intersección con el eje "y".

3. Simetrías.

a) **Eje "x"**: $y\to -y$; $-y=\sqrt{\dfrac{x+3}{x}}$; $y=-\sqrt{\dfrac{x+3}{x}}$ cambió, no hay simetría con el eje "x".

b) **Eje "y"**: $x\to -x$; $y=\sqrt{\dfrac{-x+3}{-x}}=\sqrt{\dfrac{x-3}{x}}$; cambió, no hay simetría con el eje "y".

c) **Origen**: $x\to -x$, $y\to -y$; $-y=\sqrt{\dfrac{x-3}{x}}$; $y=-\sqrt{\dfrac{x-3}{x}}$ cambió, no hay simetría con el origen.

4. Asíntotas.

a) **Horizontales**: Por la 1ª Regla, efectuamos la división:

$$\begin{array}{r|l} & \;1 \\ \hline x & x-3 \\ & -x \\ \hline & \quad -3 \end{array}$$

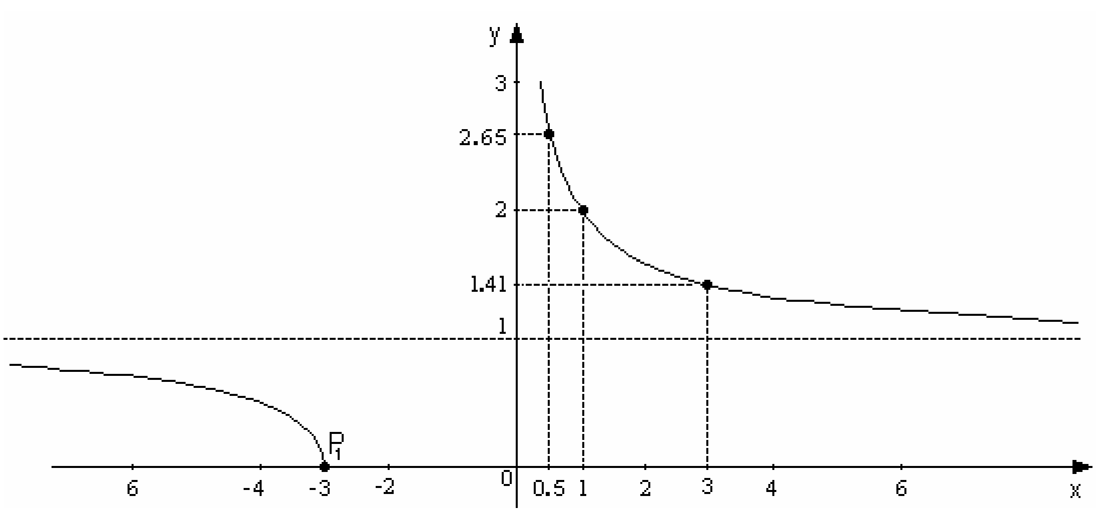
; $y=1$ es la ecuación de la asíntota horizontal.

b) **Verticales**: Igualando a cero el denominador $x=0$ es la ecuación de la asíntota vertical (es el eje "y").

5. Tabulación.

x	-6	-5	0.5	1	3
y	0.71	0.63	2.65	2	1.41

6. Gráfica.



4) $y=\sqrt{x\left(4-x^2\right)}$

Solución

1. Extensión.

a) Dominio: Los valores permisibles para "x" son los que hacen que el subradical sea no negativo, esto sucederá cuando "x" tome valores menores o iguales que -2 y valores entre cero y dos inclusive, esto es:

$x\left(4-x^2\right)\geq 0$, descomponiendo en sus factores se tiene que $x(2-x)(2+x)\geq 0$, jugando con los signos de cada factor en los intervalos que nos definen las raíces $x=-2, 0, 2$ se observa que los únicos intervalos que hacen verdadera la desigualdad $x(2-x)(2+x)\geq 0$ son:

$Do\min io=(-\infty,-2]\cup[0,2]$

2. Intersecciones.

a) Eje "x": Si $y=0$; $0=\sqrt{x\left(4-x^2\right)}=\sqrt{x(2-x)(2+x)}$; $x(2-x)(2+x)=0$; $x=0$; $P_1(0,0)$

$x=-2$; $P_2(-2,0)$

$x=2$; $P_3(2,0)$

b) Eje "y": Si $x=0$; $y=\sqrt{0\left(4-(0)^2\right)}=\sqrt{0}=0$; $P_1(0,0)$.

3. Simetrías.

a) Eje "x": $y\to -y$; $-y=\sqrt{x\left(4-x^2\right)}$; $y=-\sqrt{x\left(4-x^2\right)}$ cambió, no hay simetría con el eje "x".

b) Eje "y": $x\to -x$; $y=\sqrt{(-x)\left(4-(-x)^2\right)}=\sqrt{-x\left(4-x^2\right)}$; cambió, no hay simetría con el eje "y".

c) Origen: $x\to -x$, $y\to -y$; $-y=\sqrt{-x\left(4-x^2\right)}$; $y=-\sqrt{-x\left(4-x^2\right)}$ cambió, no hay simetría con el origen.

4. Asíntotas.

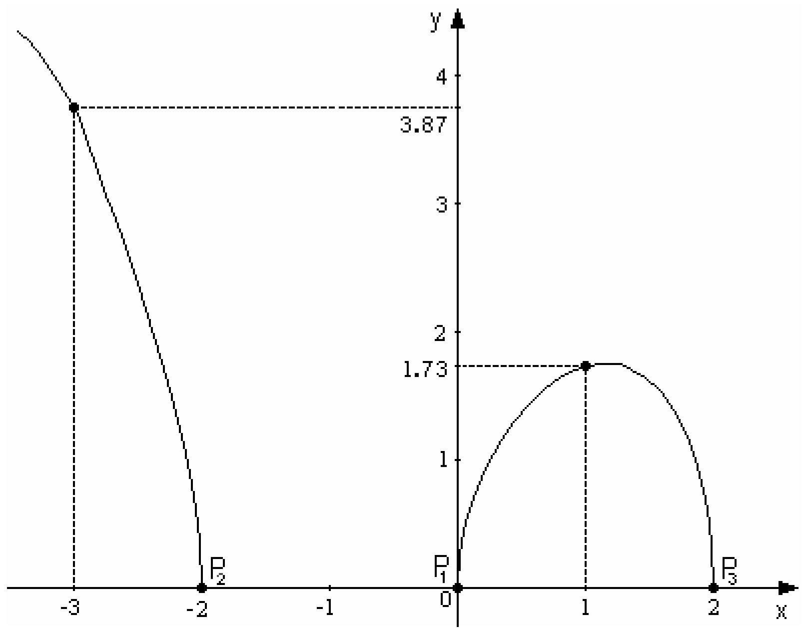
a) Horizontales: No hay.

b) Verticales: No hay.

5. Tabulación.

x	-4	-3	-2	0	1	2
y	6.93	3.87	0	0	1.73	0

6. Gráfica.



5) $-xy+x-4=0$

Solución

1. Extensión.

a) Dominio: Despejando la "y", $y=\dfrac{x-4}{x}$, igualando a cero el denominador $x=0$, los valores permisibles para "x" son todos los reales excepto cero. $Dominio=\mathbb{R}-\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$.

2. Intersecciones.

a) Eje "x": Si $y=0$; $0=\dfrac{x-4}{x}$; $x-4=0$; $x=4$; $P_1(4,0)$

b) Eje "y": Si $x=0$; $y=\dfrac{0-4}{0}$; no hay.

3. Simetrías.

a) Eje "x": $y\to -y$; $-y=\dfrac{x-4}{x}$; $y=-\dfrac{x-4}{x}$ cambió, no hay simetría con el eje "x".

b) Eje "y": $x\to -x$; $y=\dfrac{-x-4}{-x}=\dfrac{x+4}{x}$; cambió, no hay simetría con el eje "y".

c) Origen: $x\to -x$, $y\to -y$; $-y=\dfrac{x+4}{x}$; $y=-\dfrac{x+4}{x}$ cambió, no hay simetría con el origen.

4. Asíntotas.

a) **Horizontales**: Por la 1ª Regla, efectuando la división:

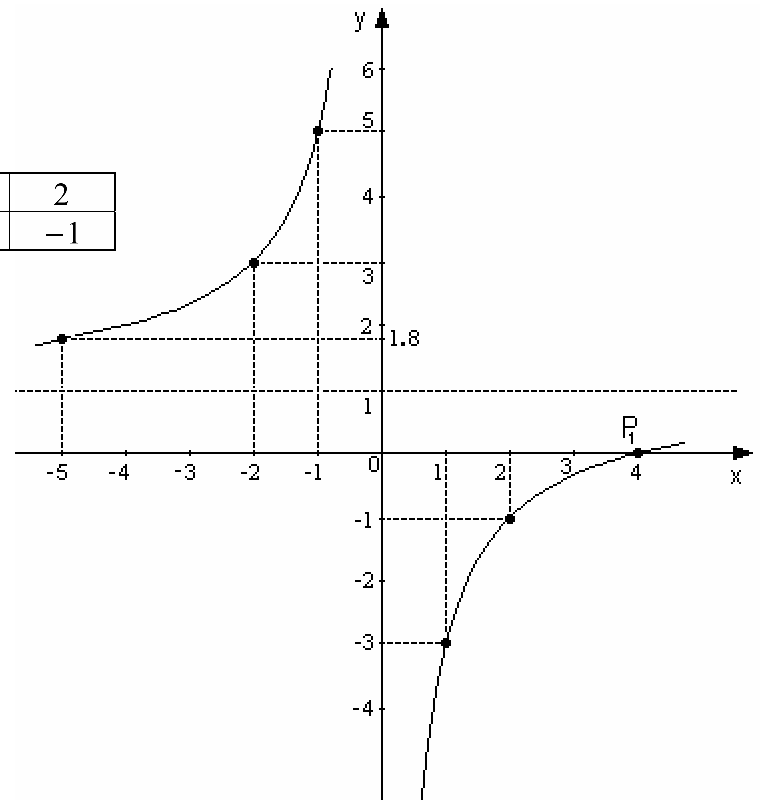
$$y = \frac{x-4}{x} = 1 - \frac{4}{x}\ ;\ y = 1 \text{ es la ecuación de la asíntota horizontal.}$$

b) **Verticales**: Igualando a cero el denominador $x = 0$ es la ecuación de la asíntota vertical (es el eje "y").

5. Tabulación.

x	-5	-2	-1	1	2
y	1.8	3	5	-3	-1

6. Gráfica.



EJERCICIOS

Discutir la ecuación dada en cada inciso.

1) $x^2y - xy - 2x^2 - 2y - x + 5 = 0$

2) $x^2y - 2xy - x - 3 = 0$

3) $y = \sqrt{\frac{x}{x^2 - 9}}$

4) $y = \sqrt{x^2(x-1)}$

5) $xy - 2x - 2y + 6 = 0$