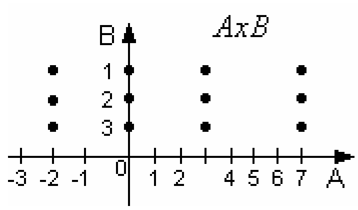
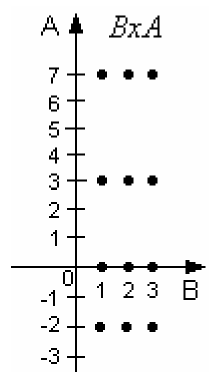
SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS DEL CAPÍTULO I

1.1. PRODUCTO CARTESIANO

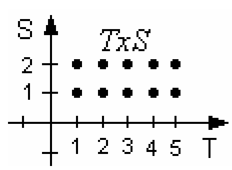
1) $AxB = \{(-2,1),(-2,2),(-2,3),(0,1),(0,2),(0,3),(3,1),(3,2),(3,3),(7,1),(7,2),(7,3)\}$



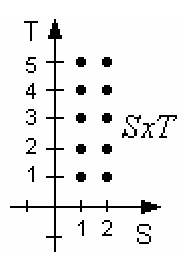
$BxA = \{(1,-2),(1,0),(1,3),(1,7),(2,-2),(2,0),(2,3),(2,7),(3,-2),(3,0),(3,3),(3,7)\}$



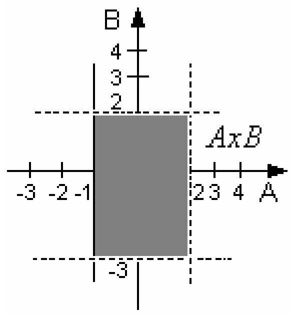
2) $TxS = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(5,1),(5,2)\}$

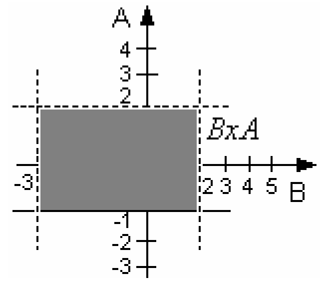


$SxT = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5)\}$

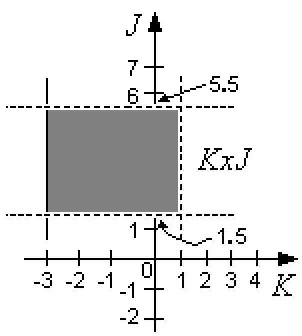


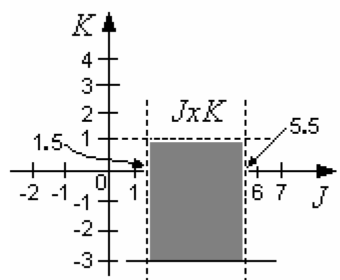
3)


B
4
3
2
AxB
-3 -2 -1
2 3 4 A
-3

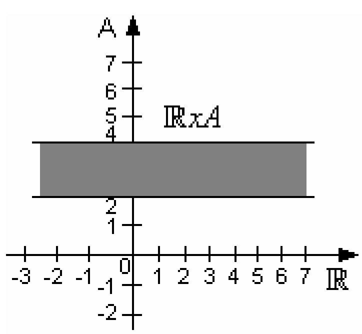

A
4
3
2
BxA
-3
2 3 4 5 B
-1
-2
-3

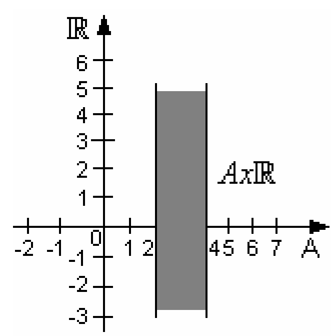
4)


J
7
6
5.5
KxJ
1
1.5
-3 -2 -1 0 1 2 3 4 K
-1
-2


K
4
3
2
JxK
1
1.5
5.5
-2 -1 0 1 6 7 J
-1
-2
-3

5)


A
7
6
5
4
ℝxA
2
1
-3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 ℝ
-1
-2

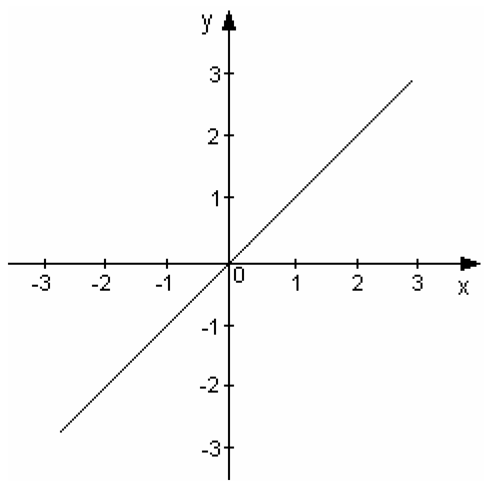

ℝ
6
5
4
3
2
1
Axℝ
-2 -1 0 1 2 4 5 6 7 A
-1
-2
-3

1.2. RELACIONES

1) Por ejemplo:

x	-3	-2	0	1
y	-3	-2	0	1

2)



3) Un número "y" es igual a la raíz cuadrada de otro número "x".

4) $y^2 = 4 - x^2$

5)

x	-2	-1	-1	0	0	2	2
y	0	-1	$+1$	$-\sqrt{2}$	$+\sqrt{2}$	-2	$+2$

6) $y^2 = x + 2$

Relaciones Implícitas y Explícitas

1) $y^2 - 3x - 6y + 8 = 0$

Solución

Por fórmula general de 2° grado en "y"

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\ ; \quad a = 1\ ;\ b = -6\ ;\ c = -3x + 8$$

$$y_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4(1)(-3x+8)}}{2(1)}$$
$$y_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-4(-3x+8)}}{2}$$
$$y_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36+12x-32}}{2}$$
$$y_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{12x+4}}{2}$$
$$y_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{4(3x+1)}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{4}\sqrt{3x+1}}{2}=\frac{6\pm2\sqrt{3x+1}}{2}$$
$$y_{1,2}=3\pm\sqrt{3x+1}$$

2) $3x-2y+5=0$

<u>Solución</u>

$$-2y=-3x-5$$
$$(-1)(-2y)=(-1)(-3x-5)$$
$$2y=3x+5$$
$$y=\frac{3x+5}{2}$$
$$y=\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$$

3) $9xy-3y-6x-12=0$

<u>Solución</u>

$$\frac{9xy-3y-6x-12}{3}=\frac{0}{3}$$
$$3xy-y-2x-4=0$$
$$3xy-y=2x+4$$
$$y(3x-1)=2(x+2)$$
$$y=\frac{2(x+2)}{(3x-1)}$$

4) $4x^2 + 6xy + \frac{2x^2}{5} = 18 - 4xy$

Solución

$$4x^2 + \frac{2}{5}x^2 + 6xy + 4xy = 18$$
$$\frac{20x^2 + 2x^2}{5} + 10xy = 18$$
$$\frac{22}{5}x^2 + 10xy = 18$$
$$10xy = 18 - \frac{22}{5}x^2$$
$$10xy = \frac{18(5) - 22x^2}{5}$$
$$10xy = \frac{90 - 22x^2}{5}$$
$$y = \frac{\frac{90 - 22x^2}{5}}{10x} = \frac{\frac{90 - 22x^2}{5}}{\frac{10x}{1}} = \frac{(1)(90 - 22x^2)}{(10x)(5)}$$
$$y = \frac{90 - 22x^2}{50x}$$

5) $-8x = x^2 + 2xy$

Solución

$$-2xy = x^2 + 8x$$
$$(-1)(-2xy) = (-1)(x^2 + 8x)$$
$$2xy = -(x^2 + 8x)$$
$$y = \frac{-(x^2 + 8x)}{2x}$$
$$y = \frac{-(x + 8)}{2}$$
$$y = -\frac{1}{2}x - 4$$

1.3. FUNCIONES

1) $xy = 1$

Solución

Si es función, ya que para cada valor de "x", le corresponde uno de "y", por tanto se puede expresar como:

$$y = \frac{1}{x} \;;\; \left(x, \frac{1}{x}\right) \;;\; f(x): \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} \text{ donde } f(x) = \frac{1}{x} \;;\; p = \frac{1}{q}$$

2) $x^2 + y^2 - 2xy - 1 = 0$

Solución

Primero se despeja "y" :

$$x^2 - 2xy + y^2 = 1$$
$$(x - y)^2 = 1$$
$$(x - y) = \pm\sqrt{1}$$
$$-y = -x \pm 1$$
$$(-1)(-y) = (-1)(-x \pm 1)$$
$$y = x \pm 1$$

No es función, ya que para cada valor de "x", le corresponden dos valores a "y".

3) $\ln x^y = 4$

Solución

Primero se despeja "y" : por la propiedad $\ln x^n = n \ln x$

$$y \ln x = 4$$
$$y = \frac{4}{\ln x}$$

Si es función, porque a cada valor de "x", le corresponde uno de "y", por lo que se puede expresar como:

$$y = \frac{4}{\ln x} \;;\; \left(x, \frac{4}{\ln x}\right) \;;\; f(x): \mathbb{R}^+ - \{1\} \to \mathbb{R} \text{ donde } f(x) = \frac{4}{\ln x} \;;\; p = \frac{4}{\ln q}$$

Otra forma de denotar el dominio de esta función es: $D = \mathbb{R}^+ - \{1\} = (0,1) \cup (1, \infty)$

4) $3x^2 + 3y^2 = 6$

Solución

Primero se despeja "y":

$$3y^2 = 6 - 3x^2$$
$$y^2 = \frac{6-3x^2}{3} = 2 - x^2$$
$$y = \pm\sqrt{2-x^2}$$

No es función, porque a cada valor de "x", le corresponden dos valores de "y".

5) $x^2 + y\cos 2x = 4$

Solución

Primero se despeja "y":

$$y\cos 2x = 4 - x^2$$
$$y = \frac{4-x^2}{\cos 2x}$$

Si es función, porque a cada valor de "x", le corresponde uno de "y", por lo que se puede expresar como:

$y = \dfrac{4-x^2}{\cos 2x}$; $\left(x, \dfrac{4-x^2}{\cos 2x}\right)$; $f(x): \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ donde $f(x) = \dfrac{4-x^2}{\cos 2x}$; $p = \dfrac{4-q^2}{\cos 2q}$

1.4. DOMINIO Y RANGO

1) $2x + 3y + 1 = 0$

Solución

Esta función está dada en forma implícita, al despejar a la variable "y" se tiene $3y = -2x - 1$; $y = \dfrac{-2x-1}{3}$; $y = -\dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{3}$. En ésta última expresión se observa que se trata de una función polinomial de 1^er^ grado, por tanto, su dominio y su rango es el conjunto de los números reales, o sea: $D = (-\infty, \infty)$; $R = (-\infty, \infty)$.

2) $f(x)=2(x-1)^2+3$

Solución

Esta es una función polinomial y si la desarrollamos algebraicamente, nos damos más cuenta de esta afirmación: $y=2x^2-4x+5$, por lo que toda la función polinomial tiene por dominio y rango a todos los reales, a menos que se diga otra cosa. $D=(-\infty,\infty)$; $R=(-\infty,\infty)$

3) $f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{2x-1}}$

Solución

Si una función se presenta en forma de fracción y además en el denominador se tiene a la v.i. "x" dentro de un radical, con índice par, se debe verificar que el subradical $2x-1>0$, resolviendo esta desigualdad se tiene que $2x>1$, $x>\dfrac{1}{2}$, esto nos indica que el dominio son todos los números reales mayores estrictamente que $\dfrac{1}{2}$, o sea $D=\left(\dfrac{1}{2},\infty\right)$. Para la determinación del rango de esta función, se tiene que de acuerdo con su dominio, la v.i. "x" no puede tomar valores negativos, por consiguiente la v.d. "y" nunca será negativa. Al despejar a "x" de la expresión original se obtiene: $x=\dfrac{y^2-2\pm\sqrt{y^2-8}}{4}$ y garantizando que el subradical sea no negativo, se tiene que $y^2-8\geq 0$; $y^2\geq 8$; $y\geq 2\sqrt{2}$ y el rango es $R=\left[2\sqrt{2},\infty\right)$.

4) $f(x)=2\ln\left(x^2+2\right)-1$

Solución

En esta función, el argumento del logaritmo $\left(x^2+2\right)$ nunca será ni cero ni negativo para cualquier valor que se asigne a la v.i. "x" por lo que el dominio es $D=(-\infty,\infty)$. En cuanto al rango de esta función se tiene que; observando la función original, se ve que el menor valor que tomará la v.d. "y" es cuando la v.i. "x" toma el valor de cero o sea: $y=2\ln\left(0^2+2\right)-1$; $y=2\ln(2)-1$; $y=\ln\left(2^2\right)-1$; $y=\ln(4)-1$ por lo tanto el rango es $R=[\ln(4)-1,\infty)\approx[0.39,\infty)$.

5) $f(x) = 4x^2 + 4x + 1$

Solución

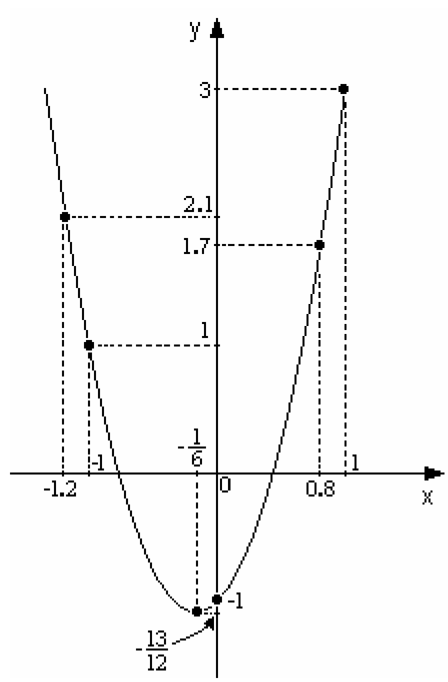
Como esta función es polinomial, su dominio y su rango son todos los números reales respectivamente, o sea: $D = (-\infty, \infty)$; $R = (-\infty, \infty)$.

1.5. GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

1) $y = 3x^2 + x - 1$

Solución

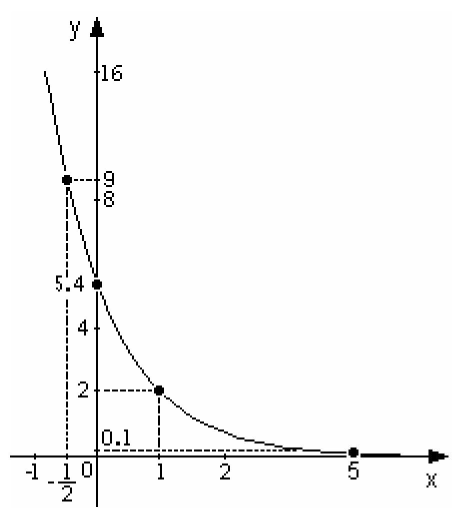
x	y
-1.2	2.1
-1	1
$-\frac{1}{6}$	$-\frac{13}{12}$
0	-1
0.8	2
1	3



2) $y = 2e^{-x+1}$

Solución

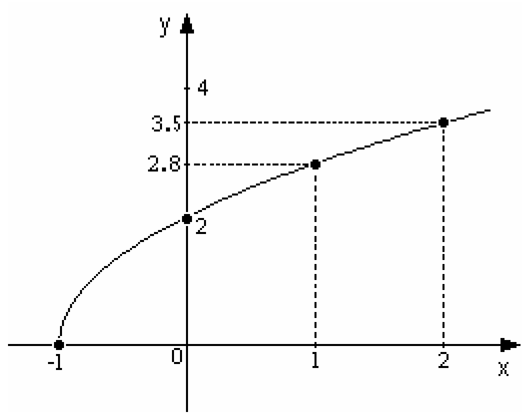
x	y
$-\frac{1}{2}$	9
0	5.4
1	2
0.1	5



3) $y=\sqrt{4x+4}$

Solución

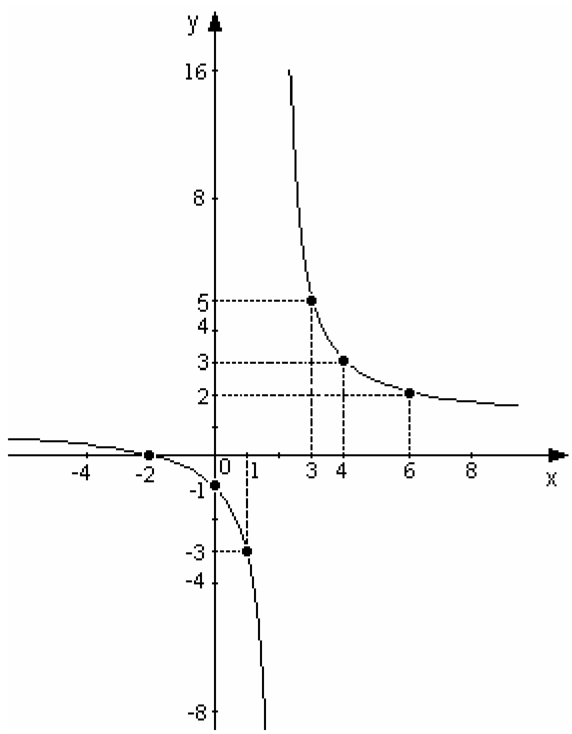
x	y
-1	0
0	2
1	2.8
2	3.5



4) $y=\dfrac{x+2}{x-2}$

Solución

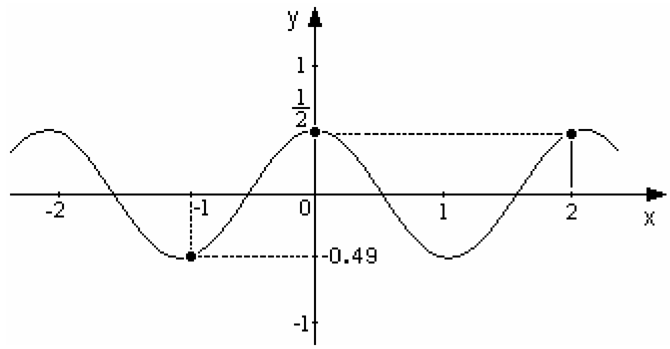
x	y
-2	0
0	-1
1	-3
3	5
4	3
6	2



5) $y = \frac{1}{2}\cos(3x)$

Solución

x	y
-1	-0.49
0	$\frac{1}{2}$
2	0.48



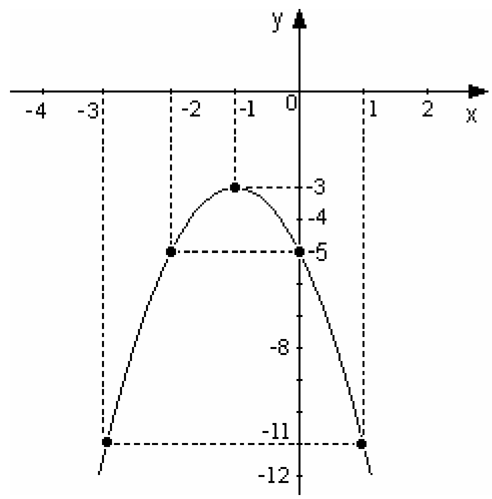
1.6. FUNCIONES INYECTIVAS, SUPRAYECTIVAS Y BIYECTIVAS

1) $f(x) = -2(x+1)^2 - 3 \quad ; \quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Solución

Ninguna de las anteriores

x	y
-3	-11
-2	-5
-1	-3
0	-5
1	-11

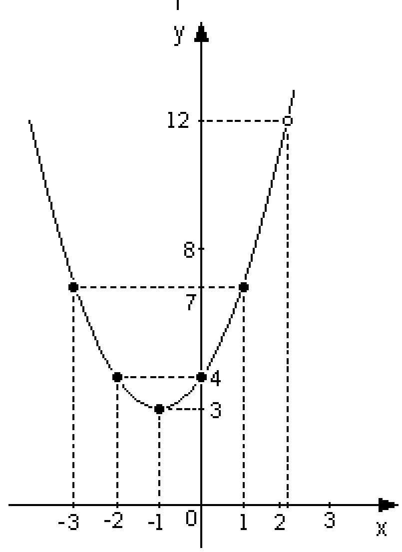


2) $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2} \quad ; \quad f: \mathbb{R} - \{2\} \to [3, \infty)$

Solución

Ninguna de las anteriores

x	y
-3	7
-2	4
-1	3
0	4
1	7

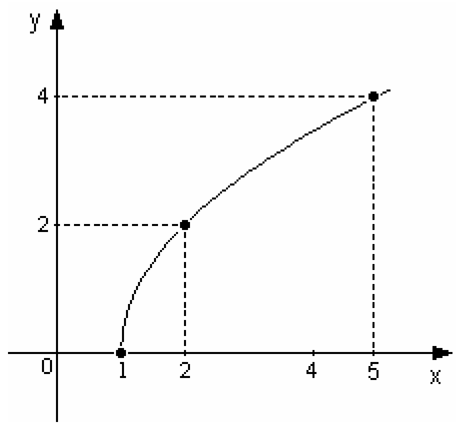


3) $f(x)=\sqrt{4x-4}$; $f:[1,\infty)\to[0,\infty)$

Solución

Es biyectiva

x	y
1	0
2	2
5	4

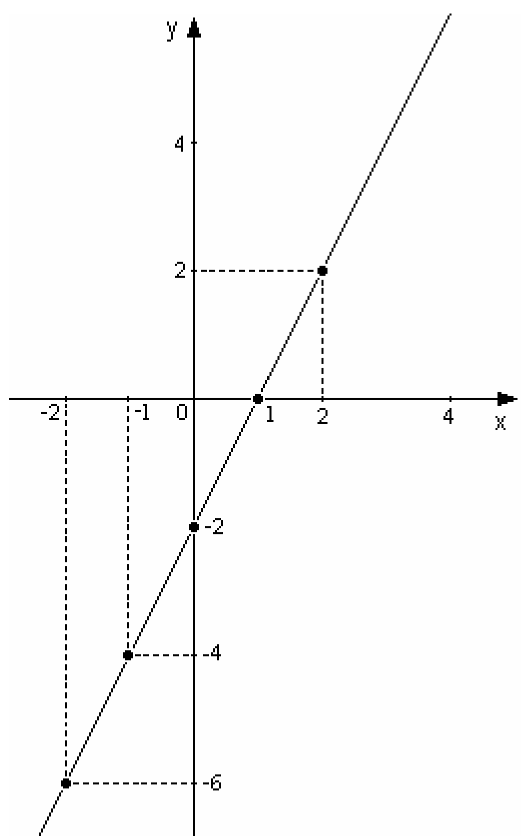


4) $f(x)=2(x-2)+2$; $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Solución

Es biyectiva

x	y
-2	-6
-1	-4
0	-2
1	0
2	2

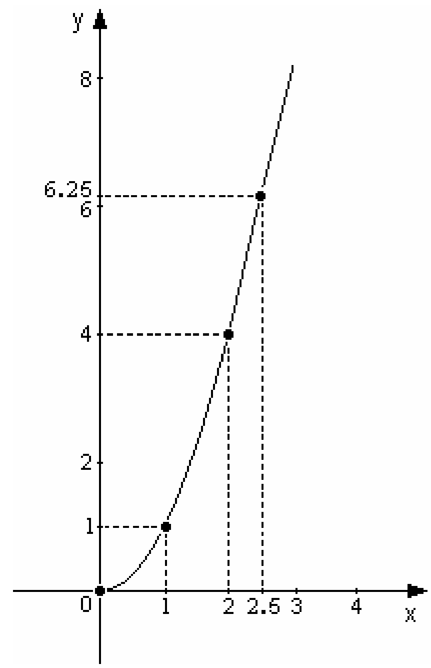


5) $f(x)=x^2$; $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

<u>Solución</u>

Es inyectiva

x	y
0	0
1	1
2	4
2.5	6.25



1.7. FUNCIÓN INVERSA

1) $f(x)=4x-1$

<u>Solución</u>

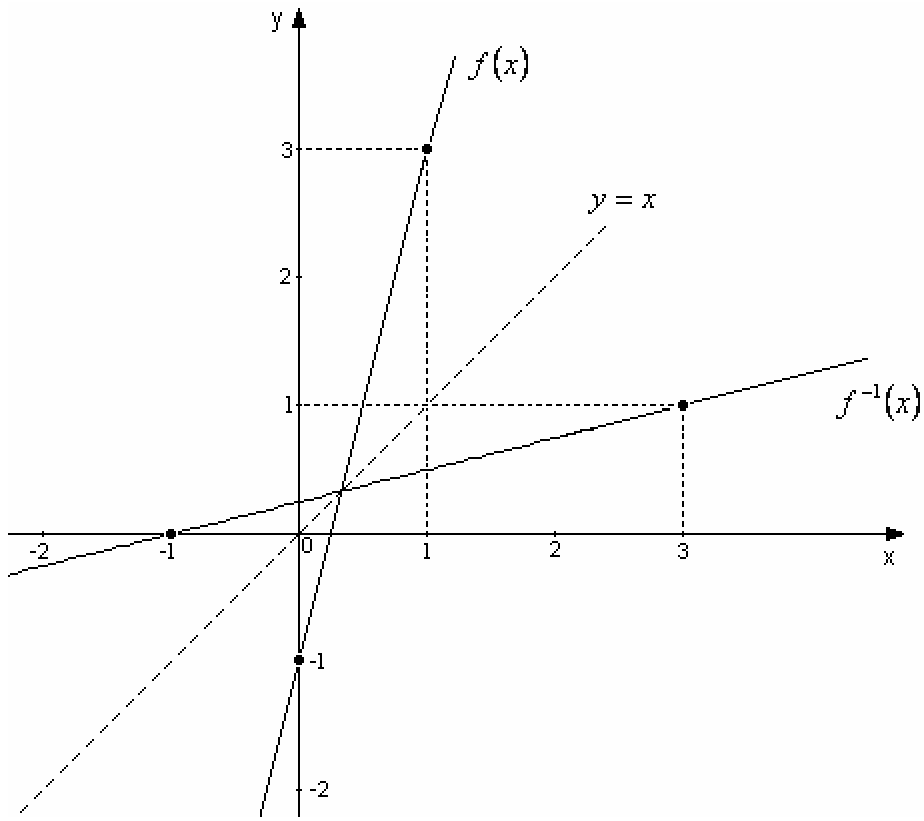
Intercambiando variables, tenemos: $x=4y-1$, de esta última despejando la $y=\dfrac{x+1}{4}$, $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{4}$. Tabulando estas dos funciones y graficándolas se tiene:

$f(x)=4x-1$

x	y
-3	-13
-2	-9
-1	-5
0	-1
1	3
2	7
3	11

$f^{-1}(x)=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{4}$

x	y
-13	-3
-9	-2
-5	-1
-1	0
3	1
7	2
11	3



2) $f(x) = x^3$

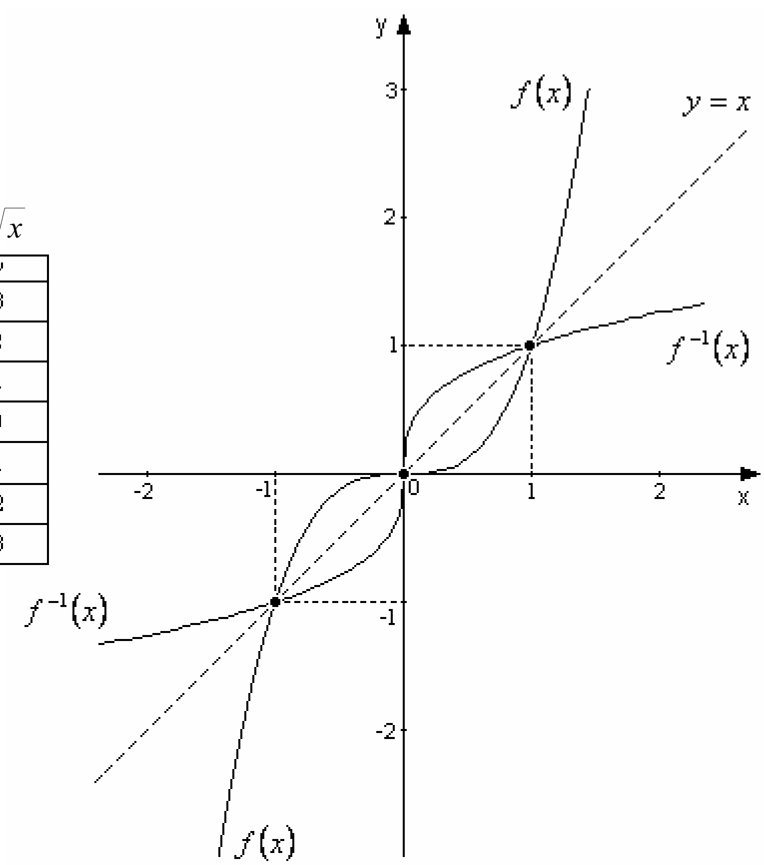
<u>Solución</u>

$f(x) = x^3$

x	y
-3	-27
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8
3	27

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

x	y
-27	-3
-8	-2
-1	-1
0	0
1	1
8	2
27	3

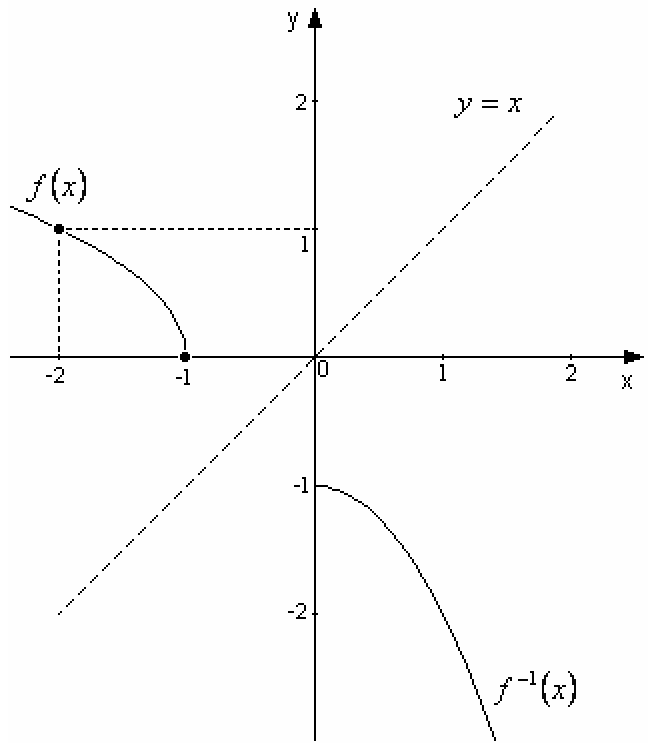


3) $f(x)=\sqrt{-1-x}$

Solución

x	y
-1	0
-2	1
-3	1.41
-4	1.73
-5	2
-6	2.23
-7	2.44

x	y
0	-1
1	-2
1.41	-3
1.73	-4
2	-5
2.23	-6
2.44	-7



4) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

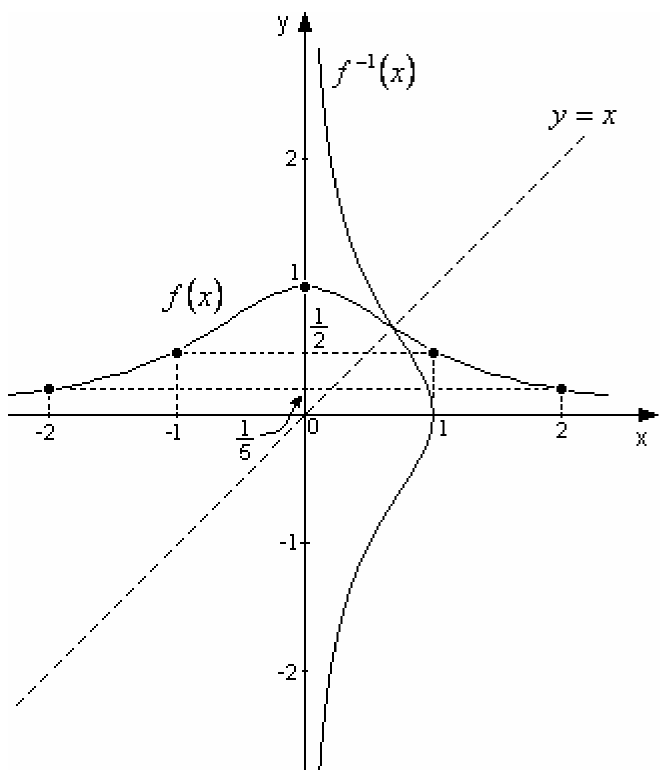
Solución

$f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

x	y
-3	$\frac{1}{10}$
-2	$\frac{1}{5}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{5}$
3	$\frac{1}{10}$

$f^{-1}(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x}-1}$

x	y
$\frac{1}{10}$	-3
$\frac{1}{5}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{5}$	2
$\frac{1}{10}$	3



5) $f(x) = 2^x$

Solución

$f(x) = 2^x$

x	y
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

$f^{-1}(x) = \log_2 x$

x	y
$\frac{1}{8}$	-3
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3