SOLUCIÓN A LOS EJERCICIOS DEL CAPÍTULO VI

6.1. ECUACIÓN DE UN LUGAR GEOMÉTRICO

1) $12x+8y-36=0$
2) $x^2+y^2-4x+2y-4=0$
3) $2x-y-8=0$
4) $y^2-6x+9=0$
5) $3x^2+4y^2-24x+36=0$

6.3. ECUACIÓN DE UNA RECTA CONOCIDOS:

a) Dos puntos.

1) $4x+6y-10=0$
2) $x-y+2=0$
3) $x-6y+4=0$
4) $x-y=0$
5) $8x-y-4=0$

b) Su pendiente y un punto.

1) $3x+4y+10=0$
2) $x+y-8=0$
3) $2x+3y-9=0$
4) $2x-y-8=0$
5) $x-4y-5=0$

c) Su pendiente y la ordenada al origen.

1) $y=-4x-3$ ó $4x+y+3=0$
2) $y=\frac{4}{3}x+2$ ó $\frac{4}{3}x-y+2=0$ ó $4x-3y+6=0$
3) $y=-1$ ó $y+1=0$
4) $y=-\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}$ ó $\frac{1}{2}x+y+\frac{2}{3}=0$ ó $3x+6y+4=0$
5) $y=3x+\frac{5}{3}$ ó $3x-y+\frac{5}{3}=0$ ó $9x-3y+5=0$

d) Conocidas las intersecciones de la recta con los ejes coordenados.

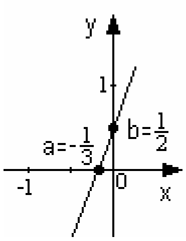
1) $3x-3y+3=0$
2) $x-y-3=0$
3) $2x+4y-8=0$
4) $3x+5y-15=0$
5) $4x-y-4=0$

e) La distancia al origen y un ángulo.

1) $x\cos 50^0 + ysen50^0 - 1.7 = 0$; $0.64x+0.77y-1.7=0$
2) $x\cos 120^0 + ysen120^0 - 3.5 = 0$; $0.5x-0.87y+3.5=0$
3) $x\cos 190^0 + ysen190^0 - 2 = 0$; $0.98x+0.17y+2=0$
4) $x\cos 270^0 + ysen270^0 - 4.2 = 0$; $y+4.2=0$ ó $y=-4.2$
5) $x\cos 90^0 + ysen90^0 - 0 = 0$; $y=0$

6.4. FORMAS DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA: GENERAL, SIMPLIFICADA, SIMÉTRICA Y NORMAL.

1)



$-3x+2y-1=0$ forma general.

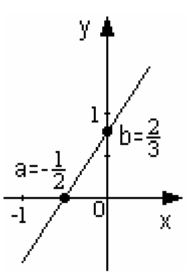
Si $m=\frac{3}{2}$, $b=\frac{1}{2}$, $a=-\frac{1}{3}$; como $C<0$; $k=\frac{1}{\sqrt{13}}$

$y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$ forma simplificada.

$\frac{x}{-\frac{1}{3}}+\frac{y}{\frac{1}{2}}=1$ forma simétrica.

$-\frac{3}{\sqrt{13}}x+\frac{2}{\sqrt{13}}y-\frac{1}{\sqrt{13}}=0$ forma normal.

2)



$4x-3y+2=0$ forma general.

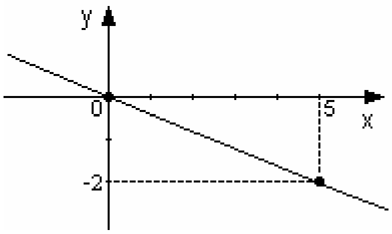
Si $m=\frac{4}{3}$, $b=\frac{2}{3}$, $a=-\frac{1}{2}$; como $C>0$; $k=-\frac{1}{5}$

$y=\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$ forma simplificada.

$\frac{x}{-\frac{1}{2}}+\frac{y}{\frac{2}{5}}=1$ forma simétrica.

$-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-\frac{2}{5}=0$ forma normal.

3)



$2x+5y=0$ forma general.

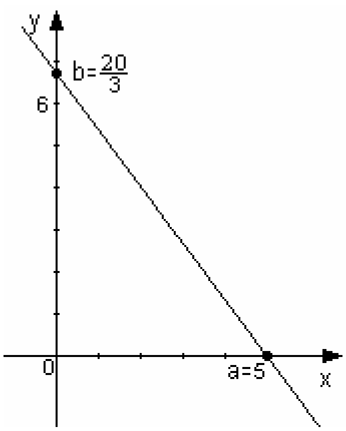
Si $m=-\frac{2}{5}$, $b=0$, $a=0$; como $C=0$, $B\neq 0$; $k=\frac{1}{\sqrt{29}}$

$y=-\frac{2}{5}x$ forma simplificada.

No existe forma simétrica ya que $a=b=0$

$\frac{2}{\sqrt{29}}x+\frac{5}{\sqrt{29}}=0$ forma normal.

4)



$\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-4=0$ forma general.

$5\left(\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-4\right)=5(0)$

$4x+3y-20=0$ forma general con coeficientes enteros.

Si $m=-\frac{4}{3}$, $b=\frac{20}{3}$, $a=5$; como $C<0$, $k=\frac{1}{5}$

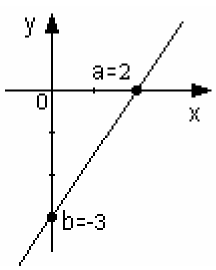
$y=-\frac{4}{3}x+\frac{20}{3}$ forma simplificada.

$\frac{x}{5}+\frac{y}{\frac{20}{3}}=1$ forma simétrica.

$\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-4=0$ forma normal.

Esto quiere decir que en este problema la forma general y normal son iguales.

5)



$-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+1=0$ forma general.

$(-6)\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+1\right)=(-6)(0)$

$3x-2y-6=0$ forma general con coeficientes enteros.

Si $m=\frac{3}{2}$, $b=-3$, $a=2$; como $C<0$; $k=\frac{1}{\sqrt{13}}$

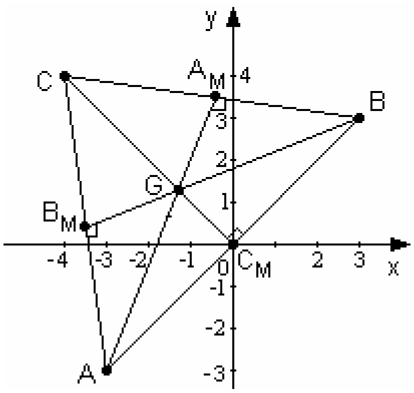
$y=\frac{3}{2}x-3$ forma simplificada.

$\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}=1$ forma simétrica.

$\frac{3}{\sqrt{13}}x-\frac{2}{\sqrt{13}}y-\frac{6}{\sqrt{13}}=0$ forma normal.

6.5. ECUACIONES DE: LAS MEDIANAS, MEDIATRICES Y ALTURAS DE UN TRIÁNGULO, SUS PUNTOS DE INTERSECCIÓN (G, C y H) Y RECTA EULER.

1) $A(-3,3)$, $B(3,3)$, $C(-4,4)$

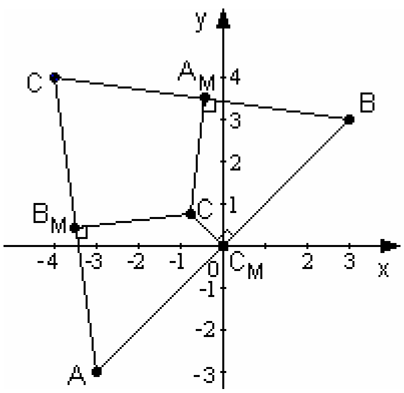


$$\left.\begin{array}{l} A_M\left(-\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right) \\ B_M\left(-\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right) \\ C_M(0,0) \end{array}\right\} \text{Puntos medios de cada lado}$$

$$\left.\begin{array}{l} m_{AB}=1 \\ m_{BC}=-\frac{1}{7} \\ m_{CA}=-7 \end{array}\right\} \text{Pendientes de cada lado}$$

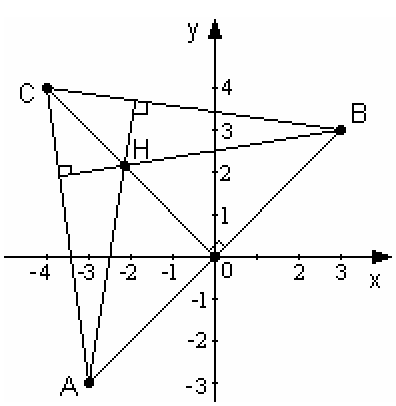
$$\left.\begin{array}{l} AA_M : 13x-5y+24=0 \\ BB_M : 5x-13y+24=0 \\ CC_M : x+y=0 \end{array}\right\} \text{Ecuaciones de las medianas} \qquad G\left(-\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$$

2)



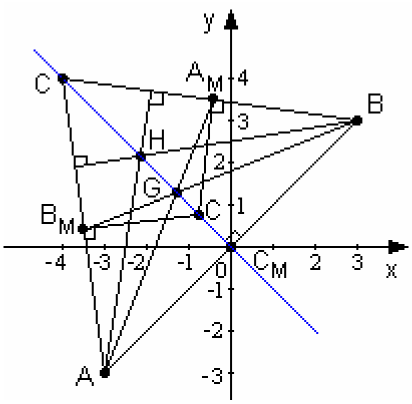
$$\left.\begin{array}{l} CA_M : y=7x+7 \\ CB_M : y=\frac{1}{7}x+1 \\ CC_M : y=-x \end{array}\right\} \text{Ecuaciones de las mediatrices} \qquad C\left(-\frac{7}{8},\frac{7}{8}\right)$$

3)



$$\left.\begin{array}{l} AH : y=7x+18 \\ BH : y=\frac{1}{7}x+\frac{18}{7} \\ CH : y=-x \end{array}\right\} \text{Ecuaciones de las alturas} \qquad H\left(-\frac{9}{4},\frac{9}{4}\right)$$

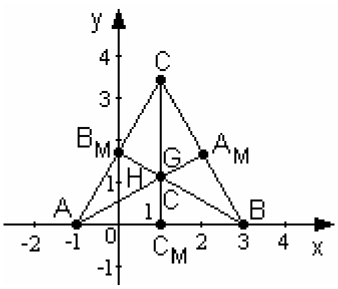
4)



$m_{GC} = -1$; $m_{GH} = -1$

Ecuación de Euler: $x + y = 0$

5) $A(-1,0)$, $B(3,0)$, $C\left(1,2\sqrt{3}\right)$



$$\left.\begin{array}{l} A_M\left(2,\sqrt{3}\right) \\ B_M\left(0,\sqrt{3}\right) \\ C_M(1,0) \end{array}\right\}\text{Puntos medios de cada lado} \qquad \left.\begin{array}{l} m_{AB} = 0 \\ m_{BC} = -\sqrt{3} \\ m_{AC} = \sqrt{3} \end{array}\right\}\text{Pendientes de cada lado}$$

$$\left.\begin{array}{l} AA_M : \sqrt{3}x - 3y + \sqrt{3} = 0 \\ BB_M : \sqrt{3}x + 3y - 3\sqrt{3} = 0 \\ CC_M : x - 1 = 0 \end{array}\right\}\text{Ecuaciones de las medianas} \qquad G\left(1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \left(1,\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} CA_M : x - \sqrt{3}y + 1 = 0 \\ CB_M : x + \sqrt{3}y - 3 = 0 \\ CC_M : x - 1 = 0 \end{array}\right\}\text{Ecuaciones de las mediatrices} \qquad C\left(1,\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} AH : x - \sqrt{3}y + 1 = 0 \\ BH : x + \sqrt{3}y - 3 = 0 \\ CH : x - 1 = 0 \end{array}\right\}\text{Ecuaciones de las alturas} \qquad H\left(1,\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$m_{GC} = m_{GH} =$ No existe ; Ecuación de Euler: $x - 1 = 0$ ó $x = 1$

6.6. DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

1) $P_1(4,1)$, $y=\frac{1}{2}x+3$

forma general $\frac{1}{2}x-y+3=0$; $d=\frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{\frac{1}{2}(4)-(1)+3}{-\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+(-1)^2}}=-\frac{8}{\sqrt{5}}\approx -3.6$

2) $P_1(3,5)$, $\frac{x}{5}+\frac{y}{5}=1$

forma general $x+y-5=0$; $d=\frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{(3)+(5)-5}{\sqrt{(1)^2+(1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}\approx 2.1$

3) $P_1(-2,1)$, $\frac{1}{2}x+2y+4=0$; $d=\frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{\frac{1}{2}(-2)+2(1)+4}{-\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+(2)^2}}=-\frac{10}{\sqrt{17}}\approx -2.4$

4) $L_1: 2x-y+3=0$; $L_2: 4x-2y-2=0$

si $x=0$ en L_1, $y=3$, $P_1(0,3)$

$$d=\frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{4(0)-2(3)-2}{\sqrt{(4)^2+(-2)^2}}=\frac{-8}{\sqrt{20}}\approx -1.8$$

5) $L_1: 3x-4y-6=0$; $d=2$ (positiva)

sustituyendo valores en $d=\frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$

$$2=\frac{3x-4y-6}{\sqrt{(3)^2+(-4)^2}}\ ;\ 2=\frac{3x-4y-6}{\sqrt{25}}\ ;\ 10=3x-4y-6\ ;\ 3x-4y-16=0$$

6.7. ECUACIÓN DE LAS BISECTRICES DE UN TRIÁNGULO Y SU PUNTO DE INTERSECCIÓN “I” (INCENTRO)

1) $A(0,4)$, $B(4,0)$ y $C(0,-7)$, $D(1,0)$

Ecuación de la recta AB: $x+y-4=0$
Ecuación de la recta CD: $7x-y-7=0$
Ecuación de la bisectriz del ángulo agudo: $12x+4y-27=0$
Ecuación de la bisectriz del ángulo suplementario: $2x-6y+13=0$

2) $(L_1)\ldots\ \frac{x}{5}+\frac{y}{5}=1$ y $(L_2)\ldots\ y=7x+7$

Ecuación de la bisectriz del ángulo agudo θ: $6x+2y-9=0$

3) (L_1) pasa por $A(1,-1)$ y tiene pendiente $m_1=\frac{3}{4}$, (L_2) pasa por $B(-1,-6)$ y tiene pendiente $m_2=\frac{4}{3}$

Ecuación de la bisectriz del ángulo agudo: $x-y-3=0$

4) $A\left(\frac{5}{2},-\frac{15}{2}\right)$, $B(5,0)$, $C\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right)$

Ecuaciones de las bisectrices en:
Ángulo interior en el vértice A: $2x-5=0$
Ángulo interior en el vértice B: $x-y-5=0$
Ángulo interior en el vértice C: $2x+4y+5=0$

5) Coordenadas del incentro del inciso anterior: $I\left(\frac{5}{2},-\frac{5}{2}\right)$

Distancia del incentro al lado AB: $-\dfrac{3\left(\frac{5}{2}\right)-\left(-\frac{5}{2}\right)-15}{\sqrt{10}}=\dfrac{5}{\sqrt{10}}$

Distancia del incentro al lado BC: $-\dfrac{\frac{5}{2}-3\left(-\frac{5}{2}\right)-5}{\sqrt{10}}=\dfrac{5}{\sqrt{10}}$

Distancia del incentro al lado CA: $\dfrac{3\left(\frac{5}{2}\right)-\frac{5}{2}}{\sqrt{10}}=\dfrac{5}{\sqrt{10}}$

Entonces, en efecto, $I\left(\frac{5}{2},-\frac{5}{2}\right)$ es el centro del círculo inscrito al triángulo A,B,C.

6.8. DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS PARALELAS

1) $(L)\ldots\ x-y+5=0$; $(L')\ldots\ x-y+2=0$

$$P=\frac{5}{\sqrt{2}} \quad ; \quad P'=\frac{2}{\sqrt{2}}$$

El origen del mismo lado de L y L': $d=|p-p'|=\left|\frac{5}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{2}}\right|=\frac{3}{\sqrt{2}}\approx 2.12$

2) $(L)\ldots\ x-3y-3=0$; $(L')\ldots\ x-3y+6=0$

$$P=\frac{3}{\sqrt{10}} \quad ; \quad P'=\frac{6}{\sqrt{10}}$$

El origen entre las dos rectas: $d=p+p'=\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{6}{\sqrt{10}}=\frac{9}{\sqrt{10}}\approx 2.8$

3) $(L)\ldots\ 3x+y-3=0$; $(L')\ldots\ 3x+y-1=0$

$$P=\frac{-3}{-\sqrt{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}} \quad ; \quad P'=\frac{-1}{-\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$d=|p-p'|=\left|\frac{3}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt{10}}\right|=\frac{2}{\sqrt{10}}\approx 0.6$$

4) $(L)\ldots\ 2x-5y+7=0$; $(L')\ldots\ 2x-5y=0$

$$P=\frac{7}{\sqrt{29}} \quad ; \quad P'=\frac{0}{\sqrt{29}}=0$$

$$d=p+p'=\frac{7}{\sqrt{29}}+0=\frac{7}{\sqrt{29}}\approx 1.3$$

5) $(L)\ldots\ 2y-6=0$; $(L')\ldots\ 2y-2=0$

$$P=\frac{-6}{-\sqrt{4}}=\frac{6}{2}=3 \quad ; \quad P'=\frac{-2}{-2}=1$$

$$d=|p-p'|=|3-1|=2$$